Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 4

Przestrzenie L^{∞}. Operatory ograniczone.

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Przestrzenie L^∞ (funkcji istotnie ograniczonych)

Niech (Ω, Σ, μ) będzie ustaloną przestrzenią z miarą.

Def. Funkcja mierzalna $x : \Omega \to \mathbb{F}$ jest **istotnie ograniczona**, jeśli jest ograniczona poza zbiorem miary zero. Zbiór takich funkcji

$$L^\infty(\mu) := \{x : \Omega \to \mathbb{F} \text{ mierzalna} : \exists_{A\in\Sigma, \mu(A)=0} \sup_{t\in\Omega\setminus A} |x(t)| < \infty\}$$

tworzy przestrzeń liniową nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, gdzie

$$(x+y)(t) := x(t)+y(t), \qquad (\lambda x)(t) := \lambda x(t) \quad \left(\begin{array}{c}\text{działania}\\ \text{określone}\\ \text{punktowo!}\end{array}\right)$$

Elementy przestrzeni $L^\infty(\mu)$ mają skończone **supremum istotne**

$$\|x\|_\infty := \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t\in\Omega\setminus A} |x(t)| = \min_{\mu(A)=0} \sup_{t\in\Omega\setminus A} |x(t)|$$

Uwaga: $\|x\|_\infty = 0 \iff \mu(\{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}) = 0 \overset{def}{\iff} x \overset{\mu\text{-pw}}{=} 0$

Konwencja:

W przestrzeni $L^\infty(\mu)$ utożsamiamy funkcje równe μ-pw
(formalnie elementami $L^\infty(\mu)$ są klasy abstrakcji relacji $y \overset{\mu\text{-pw}}{\sim} x$)
Wtedy $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią unormowaną!

Thm. $L^\infty(\mu)$ z normą $\|x\|_\infty$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód:

Uw. $x_n \xrightarrow{L^\infty} x \iff x_n|_{\Omega\setminus A} \rightrightarrows x|_{\Omega\setminus A}$ gdzie $\mu(A) = 0,\ A \in \Sigma$

Prz. Jeśli μ miara licząca, to szczególnymi przypadkami $L^\infty(\mu)$ są

- $B(\Omega) := \{x : \Omega \to \mathbb{F} : \sup_{t\in\Omega} |x(t)| < \infty\}$ z normą $\|x\|_\infty := \sup_{t\in\Omega} |x(t)|$ **(przestrzeń funkcji ograniczonych)**
- ℓ^∞ z normą $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|$
- $\mathbb{F}^n$ z normą $\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x(k)|$

Klasyczne przestrzenie Banacha (ściągawka)

W poniższej tabelce $p \geq 1$.

Ozn.	**przestrzeń Banacha**	**norma**
$C_b(\Omega)$	funkcje ciągłe i ograniczone	$\\|x\\|_\infty = \sup\limits_{t\in\Omega} \|x(t)\|$
$C_0(\Omega)$	funkcje ciągłe, znikające w nieskończoności	$\\|x\\|_\infty = \max\limits_{t\in\Omega} \|x(t)\|$
$L^p(\mu)$	„funkcje” całkowalne w p-tej potędze	$\\|x\\|_p = \left(\int\limits_\Omega \|x(t)\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
$L^\infty(\mu)$	„funkcje” istotnie ograniczone	$\\|x\\|_\infty = \inf\limits_{\mu(A)=0} \sup\limits_{t\in\Omega\setminus A} \|x(t)\|$
ℓ^∞	ciągi ograniczone	$\\|x\\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x(k)\|$
ℓ^p	ciągi sumowalne w p-tej potędze	$\\|x\\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x(t)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
c	ciągi zbieżne	$\\|x\\|_\infty = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x(k)\|$
c_0	ciągi zbieżne do zera	$\\|x\\|_\infty = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x(k)\|$

Operatory ograniczone

$(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ ustalone przestrzenie unormowane.

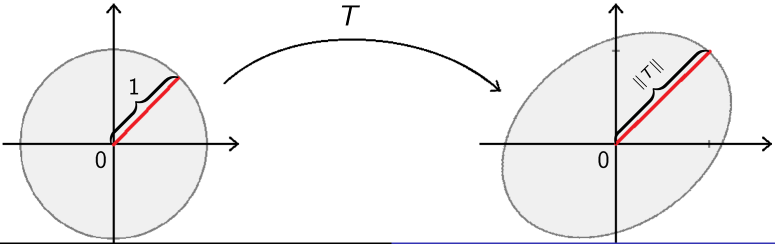
Def. **Operatorami** nazywamy odwzorowania liniowe $T : X \to Y$.
Powiemy, że operator T jest **ograniczony** jeżeli

$$\exists_{C\geq 0}\ \forall_{x\in X} \quad \|Tx\| \leq C\|x\| \qquad \left(\begin{array}{c}\text{nierówność}\\ \text{ograniczoności}\end{array}\right)$$

Normą operatora nazywamy

$$\|T\| := \inf\{C : \|Tx\| \leq C\|x\| \text{ dla każdego } x \in X\}$$

Stw. $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$



Operatory ograniczone

$(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ ustalone przestrzenie unormowane

Def. Operatorami nazywamy odwzorowania liniowe $T : X \to Y$.
Powiemy, że operator T jest **ograniczony** jeżeli

$$\exists_{C \geq 0} \, \forall_{x \in X} \quad \|Tx\| \leq C\|x\| \qquad \left(\begin{array}{c}\text{nierówność} \\ \text{ograniczoności}\end{array}\right)$$

Normą operatora nazywamy

$$\|T\| := \inf\{C : \|Tx\| \leq C\|x\| \text{ dla każdego } x \in X\}$$

Stw. $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$

Dowód: Zauważmy, że $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, dla $x \in X$. Zatem

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq \|T\|.$$

Jeśli $C := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$ i $x \in X \setminus \{0\}$, to $\left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq C \iff$ $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq C \iff \|Tx\| \leq C\|x\|$, skąd $\|T\| \leq C = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ ■

Tw. Dla dowolnego operatora $T : X \to Y$ NWSR:

1. T jest ograniczony
2. T jest odwzorowaniem ciągłym
3. T jest ciągłe w pewnym punkcie $x_0 \in X$
4. T jest ciągłe w zerze

Dowód: (1)⇒(2). Ograniczony T ma własność Lipschitza:

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq \|T\|\|x-y\|.$$

Zatem jeśli $x \to y \implies Tx \to Ty$. Czyli T ciągłe.

(2)⇒(3). (funkcja jest ciągła $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ jest ciągła w każdym punkcie)

(3)⇒(4). Jeśli $x_n \to 0$, to $x_n + x_0 \to x_0$, i z ciągłości T w x_0 mamy

$$Tx_n = T(x_n + x_0) - Tx_0 \longrightarrow Tx_0 - Tx_0 = 0 = T(0).$$

Czyli operator T jest ciągły w zerze.

(4)⇒(1). Załóżmy, że T nieograniczony. Wówczas istnieje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\|x_n\| = 1$ oraz $\|Tx_n\| \geq n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\|\frac{x_n}{\sqrt{n}}\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, czyli $\frac{x_n}{\sqrt{n}} \to 0$, oraz $\|T\frac{x_n}{\sqrt{n}}\| = \frac{1}{\sqrt{n}}\|Tx_n\| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n} \to \infty$.

Zatem T nie jest ciągły w zerze. ■

Tw. (Zasada ciągłego przedłużania operatorów)

Operator ograniczony $T : X_0 \to Y$ na gęstej podprzestrzeni $X_0 \subseteq X$ o wartościach w przestrzeni Banacha Y przedłuża się jednoznacznie do ograniczonego operatora $\overline{T} : X \to Y$ oraz $\|T\| = \|\overline{T}\|$.

Dowód: Niech $x_0 \in X = \overline{X_0}$. Weźmy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X_0$ zbieżny do x_0. Wtedy $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ jest Cauchy w Y, gdyż

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\| \longrightarrow 0, \qquad \text{przy } n, m \to \infty.$$

Skoro Y zupełna, to $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnego $y_0 \in Y$. Granica y_0 nie zależy od wyboru ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Kładąc $\overline{T}x_0 := y_0$ otrzymujemy poprawnie zdefiniowany operator $\overline{T} : X \to Y$ będący przedłużeniem T. Ponadto

$$\|\overline{T}x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\| \cdot \|x_n\| = \|T\| \cdot \|x_0\|.$$

Czyli $\overline{T}$ jest ograniczony oraz $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$. ■

Prz. 1 (całkowanie)

Niech $X := L^1(\mu)$ oraz $Y := \mathbb{F}$.Wtedy całka

$$Tx := \int_\Omega x(t)\, d\mu(t), \qquad x \in L^1(\mu),$$

jest operatorem ograniczonym $T : L^1(\mu) \to \mathbb{F}$ oraz $\|T\| = 1$:

$$|Tx| = \left|\int_\Omega x(t)\, d\mu(t)\right| \leq \int_\Omega |x(t)|\, d\mu(t) = 1 \cdot \|x\|_1,$$

skąd $\|T\| \leq 1$. Z drugiej strony biorąc dowolny zbiór mierzalny $A \subseteq \Omega$ taki, że $0 < \mu(A) < \infty$ i kładąc $x := \frac{1}{\mu(A)} 1_A$ mamy

$$\int_\Omega x\, d\mu = \int_\Omega \frac{1}{\mu(A)} 1_A\, d\mu = 1,$$

czyli $\|x\|_1 = 1$ oraz $|Tx| = 1$, skąd $1 \leq \|T\|$. Czyli $\|T\| = 1$.

Prz. 2 (Różniczkowanie)

Niech $X := C^{(1)}([0,1])$ przestrzeń funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły i niech $Y = C([0,1])$. Obie przestrzenie rozpatrujemy z normą supremum. Operator różniczkowania $T : X \to Y$

$$(Tx)(t) := x'(t) \qquad x \in C^{(1)}([0,1]), t \in [0,1],$$

jest poprawnie określony i liniowy. W rozpatrywanych normach T jest **nieograniczony**! Rzeczywiście, dla $x_n(t) = t^n$ mamy

$$\|x_n\|_\infty = 1 \quad \text{oraz} \quad \|Tx_n\| = \|x_n'\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |nt^{n-1}| = n \to \infty.$$

Standardowa norma na przestrzeni $C^{(1)}([0,1])$ jest dana wzorem

$$\|x\|_1 = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|.$$

Z tą normą na X operator T jest ograniczony oraz $\|T\| = 1$.
W szczególności $\|Tx\|_\infty = \|x'\|_\infty \leq 1 \cdot \|x\|_1$, czyli $\|T\| \leq 1$.

Prz. 3 (Mnożenie przez funkcje)

Niech $X = Y = L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Dla $a \in L^\infty(\mu)$ wzór

$$(T_a x)(t) := a(t)x(t), \qquad x \in L^p(\mu), t \in \Omega,$$

definiuje operator ograniczony $T_a : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ i $\|T_a\| = \|a\|_\infty$.

Rzeczywiście, nierówność $\|T_a\| \leq \|a\|_\infty$ wynika z

$$\begin{aligned} \|T_a x\|_p &= \left(\int_\Omega |a(t)x(t)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \|a\|_\infty^p \cdot |x(t)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|a\|_\infty \cdot \|x\|_p. \end{aligned}$$

Położżmy $A_n := \{t : |a(t)|^p \geq \|a\|_\infty^p - 1/n\}$ oraz $x_n := \frac{1}{\mu(A_n)^{1/p}} 1_{A_n}$.
Wtedy $\|x_n\|_p = 1$ oraz

$$\begin{aligned} \|T_a x_n\|_p^p &= \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \int_{A_n} |a(t)|^p \, d\mu \\ &\geq \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \int_{A_n} \|a\|_\infty^p - \frac{1}{n} \, d\mu = \|a\|_\infty^p - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Zatem $\|T_a x_n\|_p \to \|a\|_\infty$ i stąd $\|T_a\| \geq \|a\|_\infty$.